Theoretische Physik II
für Lehramtsstudenten
WS 2005/06

Vorlesungen: Michael Flohr
Übungen: Sebastian Uhlmann
Übungsleitung: Kirsten Vogeler

Präsenzübung
am 22.11.2005

2. *Gauß'sches Wellenpaket*: Die Bewegung eines freien Teilchens der Masse m in einer Raumdimension wird durch eine Wellenfunktion $\psi(x,t)$ beschrieben, die sich als Lösung der zeitabhängigen Schrödingergleichung

$$\Big(\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big)\psi(x,t)=0$$

(mit geeigneter Anfangsbedingung $\psi(x,0)$) ergibt.

(a) Wir setzen eine Wellenlösung der Form $\psi_k(x,t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}$ mit zunächst freien reellen Parametern k (der Wellenzahl) und ω (der Frequenz) an. Zeigen Sie, daß ψ_k die Schrödingergleichung erfüllt, sofern k und ω durch $\omega(k)=\frac{\hbar k^2}{2m}$ verknüpft sind.

(b) Zur Zeit $t=0$ sei die Wellenfunktion vorgegeben, $\psi(x,0)\equiv\psi(x)$. Die Fouriertransformierte der anfänglichen Wellenfunktion sei $\tilde{\psi}(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\psi(x)$. Zeigen Sie, daß sich mit $\omega=\omega(k)$ aus (a) die Wellenfunktion zur Zeit t schreiben läßt als Überlagerung ebener Wellen,

$$\psi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}\tilde{\psi}(k)\,,$$

d. h. in dieser Form wird die zeitabhängige Schrödingergleichung erfüllt.

(c) Im Rest der Aufgabe betrachten wir speziell das durch

$$\psi(x)=\frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\sigma_0^2}}\exp\Big[-\frac{x^2}{4\sigma_0^2}+\mathrm{i}k_0x\Big]$$

definierte Gaußpaket mit der anfänglichen Breite σ_0 und Impuls $\hbar k_0$.
Berechnen Sie $\tilde{\psi}(k)$ (analog zum ersten Übungsblatt) und damit $\psi(x,t)$. Verwenden Sie dabei $\tau\equiv\frac{2m\sigma_0^2}{\hbar}$ als eine für das Wellenpaket der (anfänglichen) Breite σ_0 charakteristische Zeit. Wie groß ist τ für ein Elektron mit $\sigma_0\approx 10^{-13}$ cm, und wie groß ist τ für eine Schrotkugel mit $m=1$ g, $\sigma_0=1$ cm?

(d) Zeigen Sie, daß die Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho=|\psi(x,t)|^2$ des Gaußpakets die Form

$$\rho=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-v_0t)^2}\qquad\text{mit}\qquad\sigma^2:=\sigma_0^2\Big(1+\frac{t^2}{\tau^2}\Big)\,,\quad v_0:=\frac{\partial\omega}{\partial k}\Big|_{k_0}=\frac{\hbar k_0}{m}$$

annimmt, und diskutieren Sie das Ergebnis.

(e) Berechnen Sie für das Gaußpaket den Orts- und den Impulsmittelwert

$$\langle X\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,\psi^*\,x\psi\qquad\text{und}\qquad\langle P\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,\psi^*\,\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial x}\psi$$

sowie die Schwankungsquadrate von Ort und Impuls, also

$$(\Delta X)^2=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,\psi^*(X-\langle X\rangle)^2\psi\qquad\text{und}\qquad(\Delta P)^2=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,\psi^*\Big(\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial x}-\langle P\rangle\Big)^2\psi\,.$$

Ist das Unschärfeprodukt minimal?